

# La competenza matematica

<b>Definizione dell'ambito</b> .....	28
<b>Basi teoriche del quadro di riferimento della matematica dell'OCSE/PISA</b>	30
<b>Organizzazione dell'ambito</b> .....	34
• Situazioni e contesti .....	36
• Il contenuto matematico – le quattro “idee chiave” .....	38
• I processi matematici .....	42
<b>La valutazione della competenza matematica</b> .....	53
• Caratteristiche dei compiti .....	53
• Struttura della valutazione .....	57
• Presentazione dei livelli di competenza matematica.....	57
• Sussidi e strumenti .....	59
<b>Riepilogo</b> .....	59
<b>Altri esempi</b> .....	60
• Matematica: prova 1 - FARO .....	61
• Matematica: prova 2 - TARIFFE POSTALI .....	65
• Matematica: prova 3 - BATTITO CARDIACO .....	68
• Matematica: prova 4 - PREZZI PER SUPERFICIE .....	71
• Matematica: prova 5 - STATURA DEGLI STUDENTI .....	73
• Matematica: prova 6 - ALTALENA .....	75
• Matematica: prova 7 - SERBATOIO PER L'ACQUA .....	77
• Matematica: prova 8 - TEMPO DI REAZIONE .....	79
• Matematica: prova 9 - CUBI .....	81
• Matematica: prova 10 - CONCENTRAZIONE DI UN MEDICINALE .....	85
• Matematica: prova 11 - EDIFICIO A SPIRALE .....	88
• Matematica: prova 12 - CONCERTO ROCK .....	92
• Matematica: prova 13 - TAPIS ROULANTS .....	93
<b>Sviluppo delle idee chiave</b> .....	95
• Quantità .....	95
• Spazio e forma .....	98
• Cambiamento e relazioni .....	101
• Incertezza .....	104

L'obiettivo del progetto OCSE/PISA è quello di sviluppare indicatori che forniscano informazioni sulla misura in cui i sistemi scolastici dei Paesi che partecipano all'indagine abbiano preparato i quindicenni a svolgere un ruolo attivo come cittadini nella società in cui vivono. La valutazione non è circoscritta agli apprendimenti curricolari, ma mira a verificare se gli studenti sappiano utilizzare quanto hanno appreso, in situazioni simili a quelle che si incontrano nella vita quotidiana.

## DEFINIZIONE DELL'AMBITO

Nell'indagine PISA l'ambito della competenza matematica riguarda la capacità degli studenti di analizzare, di ragionare e di comunicare idee in modo efficace nel momento in cui essi pongono, formulano e risolvono problemi matematici e ne spiegano la soluzione in una molteplicità di situazioni. Focalizzando l'attenzione su problemi del mondo reale, la valutazione messa in atto da PISA non si limita al tipo di problemi e situazioni che generalmente si affrontano a scuola. Nella realtà, infatti, facendo acquisti, viaggiando, preparando da mangiare, tenendo la contabilità o valutando questioni politiche, le persone si confrontano continuamente con situazioni nelle quali l'uso di ragionamenti di tipo matematico o geometrico o di altre competenze matematiche aiuterebbe a chiarire, formulare o risolvere un problema. Un tale uso della matematica è basato sulle abilità apprese a scuola ed esercitate attraverso il tipo di problemi che normalmente sono presentati nei libri di testo e a lezione. Tuttavia esso richiede la capacità di applicare tali abilità a un contesto meno strutturato, in cui le istruzioni sono meno chiare e in cui lo studente deve decidere quali siano le conoscenze pertinenti e come si possano utilmente applicare.

La competenza matematica, come viene valutata dall'OCSE/PISA, riguarda la misura in cui i quindicenni possono essere considerati cittadini informati e riflessivi e consumatori intelligenti. In ogni Paese, i cittadini devono confrontarsi con una miriade di compiti che implicano concetti di tipo quantitativo, geometrico, probabilistico o, più in generale, concetti matematici. Per esempio, i mass media (quotidiani, riviste, televisione e Internet) sono pieni di informazioni presentate sotto forma di tabelle, diagrammi e grafici su argomenti quali il tempo, l'economia, la medicina e lo sport, per nominarne solo alcuni. Oggi la gente è bombardata da informazioni su questioni quali "il surriscaldamento della terra e l'effetto serra", "la crescita demografica", "le macchie di petrolio e il mare", "la scomparsa della campagna". I cittadini, infine, devono confrontarsi con la necessità di leggere moduli, consultare orari degli autobus e dei treni, portare a termine correttamente transazioni economiche, decidere quale sia il miglior rapporto qualità-prezzo quando si fanno acquisti e così via. La valutazione della competenza matematica nell'OCSE/PISA mira a stabilire se gli studenti di 15 anni (livello di età che, per molti studenti, corrisponde alla fine della scuola dell'obbligo e, di conseguenza, al termine dell'apprendimento formale della matematica) sono in grado di utilizzare le nozioni e la comprensione della matematica per orientarsi nei problemi della vita quotidiana e per svolgere un ruolo attivo nella società.

La definizione di competenza matematica (*mathematical literacy*) nel progetto OCSE/PISA è la seguente:



*La competenza matematica è la capacità di un individuo di identificare e comprendere il ruolo che la matematica gioca nel mondo reale, di operare valutazioni fondate e di utilizzare la matematica e confrontarsi con essa in modi che rispondono alle esigenze della vita di quell'individuo in quanto cittadino che esercita un ruolo costruttivo, impegnato e basato sulla riflessione.*

Alcune note esplicative possono aiutare a chiarire ulteriormente tale definizione.

#### *Competenza matematica...*

Si è scelto di adoperare l'espressione "competenza matematica" per mettere l'accento sulle conoscenze matematiche attivate in modo funzionale in una molteplicità di situazioni differenti e con una varietà di approcci basati sul ragionamento e sull'intuizione (*insight*). Naturalmente, affinché una tale attivazione sia possibile, è necessaria un'ampia base di conoscenze e abilità matematiche, e tali abilità fanno parte della presente definizione di competenza. Nell'ambito del linguaggio, la *literacy* presuppone un lessico ampio e una conoscenza sostanziale di regole grammaticali, di fonetica, di ortografia, ma non può essere ridotta solo a questo. Per comunicare, gli esseri umani utilizzano l'insieme di questi elementi in modo creativo, in risposta alle situazioni che incontrano nel mondo reale. Analogamente, la *mathematical literacy* non può essere ridotta alla conoscenza della terminologia matematica, ai fatti e ai procedimenti, né tantomeno alle abilità necessarie per svolgere certe operazioni e applicare certi metodi, sebbene presupponga tutto ciò. La *mathematical literacy* comporta l'uso creativo dell'insieme di tali elementi per rispondere a quanto la situazione esterna richiede.

#### *...nel mondo reale...*

L'espressione "mondo reale" indica l'ambito naturale, sociale e culturale nel quale l'individuo vive. Come ha detto Freudenthal, "I nostri concetti matematici, le nostre strutture e le nostre idee sono state inventate come strumenti per organizzare i fenomeni del mondo fisico, sociale e mentale" (1983, p. ix).

#### *...per utilizzare la matematica e confrontarsi con essa...*

L'espressione "utilizzare la matematica e confrontarsi con essa" indica l'uso della matematica e la soluzione di problemi, nonché un più ampio coinvolgimento personale nel comunicare, nel rapportarsi, nel valutare così come nell'apprezzare la matematica e nel goderne. La definizione, dunque, va oltre l'uso funzionale della matematica in senso stretto, comprendendo anche la preparazione a proseguire gli studi e gli aspetti estetici della matematica e quelli ludici.

#### *...la vita di quell'individuo...*

Con "la vita di quell'individuo" s'intende sia la vita privata, professionale e sociale con colleghi e parenti, sia la vita in quanto cittadino che fa parte di una collettività.

Una capacità fondamentale che è chiamata in causa dalla nozione di competenza matematica è quella di porre, formulare, risolvere problemi e interpre-

tare soluzioni servendosi della matematica in una molteplicità di situazioni e contesti. Questi ultimi vanno da contesti puramente matematici a contesti in cui non è presente o non è evidente fin dall'inizio una struttura matematica, che deve piuttosto essere introdotta in modo efficace da chi pone o risolve il problema. È anche importante sottolineare che la definizione non si limita a una conoscenza di base della matematica, ma comprende il fare e l'utilizzare la matematica in situazioni che vanno da quelle quotidiane a quelle insolite e da quelle semplici a quelle complesse.

Gli atteggiamenti e le motivazioni nei confronti della matematica, come la sicurezza di sé, la curiosità, la percezione dell'interesse e dell'importanza della matematica e il desiderio di fare o capire, non compaiono nella definizione della competenza matematica, ma rientrano comunque in essa. In linea di principio è possibile essere dotati di una competenza matematica senza che questa sia accompagnata da tali atteggiamenti e motivazioni, ma in pratica è improbabile che in questo caso una tale competenza venga esercitata e attivata. Si riconosce pertanto l'importanza di tali atteggiamenti e motivazioni in quanto correlati alla competenza matematica. Tali aspetti non sono valutati direttamente per mezzo delle prove di matematica, ma vengono rilevati per mezzo di altri strumenti dell'indagine PISA.

### **BASI TEORICHE DEL QUADRO DI RIFERIMENTO DELLA MATEMATICA DELL'OCSE/PISA**

La definizione di competenza matematica adottata dal progetto OCSE/PISA è coerente con una teoria della struttura e dell'uso del linguaggio ampia e integrata quale quella che emerge dai recenti studi socio-culturali sulla *literacy*. Nel *Preamble to a Literacy Program* di James Gee (1998), il termine "*literacy*" si riferisce all'uso umano del linguaggio. La capacità di un individuo di leggere, scrivere, ascoltare e parlare una lingua è lo strumento di mediazione più importante dell'attività sociale umana. Infatti, ciascun linguaggio umano e ciascun uso del linguaggio umano ha una struttura complicata collegata in modo complesso a una molteplicità di funzioni. Il fatto che una persona sappia leggere e scrivere in una lingua vuol dire che essa conosce molti aspetti della struttura di quella lingua ed è capace di farne uso per diverse funzioni sociali. Analogamente, assimilare la matematica a una lingua significa che gli studenti devono non solo apprendere gli elementi della struttura propria del discorso matematico (i termini, i fatti, i segni e i simboli, le procedure e le abilità necessarie per eseguire determinate operazioni in sottocampi matematici specifici e la struttura di queste idee in ciascun sottocampo), ma anche imparare a usare tali elementi per risolvere problemi non familiari in una molteplicità di situazioni definite in termini di funzioni sociali. Occorre notare che, nel caso della matematica, conoscere gli elementi che caratterizzano la struttura vuol dire sia conoscere i termini, le procedure e i concetti di base che normalmente si apprendono a scuola, sia sapere come tali elementi vengono organizzati e utilizzati. Purtroppo, è possibile avere molte nozioni matematiche, senza sapere né come sono organizzate né come usarle per risolvere problemi. Tali definizioni astratte basate sull'interrelazione tra "elementi della struttura" e "funzioni", che sono alla base del quadro di riferimento della matematica nel progetto OCSE/PISA, possono essere illustrate dal seguente esempio.

Il consiglio comunale ha deciso di mettere un lampione in un piccolo parco triangolare in modo che l'intero parco sia illuminato. Dove dovrebbe essere collocato il lampione?

Questo problema pratico può essere risolto seguendo la strategia generale usata dai matematici, a cui si farà riferimento con il termine "matematizzazione". La matematizzazione può essere definita sulla base di 5 aspetti.

1. Partire da un problema reale.  
*Occorre localizzare il punto di un parco in cui mettere un lampione.*
2. Strutturare il problema in base a concetti matematici.  
*Il parco può essere rappresentato come un triangolo e l'illuminazione di un lampione come un cerchio con il lampione al centro.*
3. Isolare progressivamente il problema ritagliandolo dalla realtà attraverso processi quali il fare supposizioni sulle caratteristiche essenziali del problema stesso, il generalizzare e il formalizzare (mettendo così in evidenza gli aspetti matematici della situazione e trasformando il problema reale in un problema matematico che rappresenti fedelmente la situazione).  
*Il problema viene riformulato in: "localizzare il centro del cerchio circoscritto al triangolo".*
4. Risolvere il problema matematico.  
*Poiché il centro di un cerchio circoscritto a un triangolo giace nel punto di incontro degli assi dei lati del triangolo, occorre costruire gli assi di due lati del triangolo. Il loro punto di intersezione è il centro del cerchio.*
5. Infine, tradurre la soluzione matematica nei termini della situazione reale.  
*La soluzione trovata viene applicata alla situazione del parco reale. Occorre ragionare sulla soluzione e riconoscere che se uno dei tre angoli fosse ottuso, la soluzione non sarebbe appropriata, poiché il lampione dovrebbe essere collocato fuori dal parco. Occorre anche riconoscere che l'ubicazione e la dimensione degli alberi nel parco sono altri fattori che influiscono sull'utilità della soluzione matematica.*

Questi sono i processi che caratterizzano il modo in cui spesso i matematici fanno matematica in senso lato, il modo in cui la gente utilizza la matematica in un gran numero di lavori che svolge o che potrebbe dover svolgere, e il modo in cui cittadini informati e riflessivi dovrebbero avvalersi della matematica per impegnarsi pienamente e in modo competente nella realtà. In questa prospettiva imparare a matematizzare dovrebbe essere il primo obiettivo educativo per tutti gli studenti.

Oggi e nel futuro prossimo tutti i Paesi avranno bisogno di cittadini competenti dal punto di vista matematico per affrontare una società molto complessa e in rapido cambiamento. L'informazione disponibile è andata crescendo in modo esponenziale e i cittadini devono essere in grado di decidere come trattare questa massa di informazioni. Il dibattito pubblico fa un uso sempre maggiore di informazioni di tipo quantitativo per sostenere le proprie tesi. Un esempio del bisogno dei cittadini di possedere una competenza matematica è la frequente esigenza di formulare giudizi e valutare l'accuratezza delle conclusioni e delle affermazioni di indagini e studi. Essere in grado di giudicare la fondatezza di tali affermazioni è, e sarà sempre di più, un aspetto cruciale dell'essere un cittadino responsabile. Le fasi del processo di matematizzazione qui illustrate sono aspetti fondamentali dell'uso della matematica nelle situazioni complesse di cui sopra. Il non sapere usare nozioni matematiche, viceversa, può tradursi in decisioni personali confuse, in un'ac-

cresciuta sensibilità verso le pseudo-scienze, e in decisioni poco fondate nella vita professionale e sociale.

Un cittadino con competenze matematiche è consapevole della velocità del cambiamento e del conseguente bisogno di essere aperti all'apprendimento per tutta la vita. Adattarsi ai cambiamenti in modo creativo, flessibile e pratico è una condizione necessaria per essere buoni cittadini. Quanto appreso a scuola sarà probabilmente insufficiente a rispondere alle esigenze delle persone in gran parte della loro vita da adulti.

L'importanza di avere cittadini competenti e capaci di ragionare riguarda anche la forza lavoro: c'è sempre meno bisogno di persone che eseguano lavori manuali ripetitivi per tutta la loro vita lavorativa, mentre, al contrario, chi lavora deve controllare il risultato di un'ampia gamma di apparecchi ad alta tecnologia, avendo a che fare con un flusso ininterrotto di informazioni e misurandosi con la necessità di risolvere problemi attraverso un lavoro di squadra. Come tendenza, sempre più occupazioni richiederanno la capacità di capire, comunicare, usare e spiegare concetti e procedimenti basati sul pensiero matematico. Le fasi del processo di matematizzazione sono gli elementi costitutivi di questo tipo di pensiero matematico.

Infine, le persone competenti dal punto di vista matematico riconoscono il valore della matematica in quanto disciplina rilevante, dinamica e in evoluzione che spesso può rispondere alle loro esigenze.

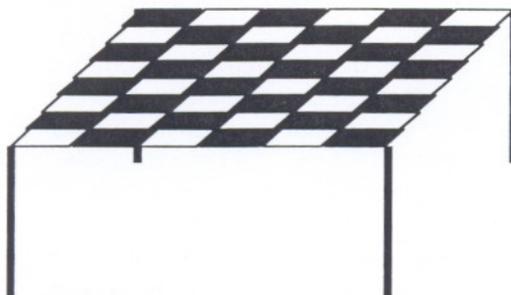
Il problema pratico affrontato dal progetto OCSE/PISA è come verificare se gli studenti di 15 anni siano competenti dal punto di vista matematico, cioè se siano capaci di matematizzare. Purtroppo, in una prova strutturata con un tempo limitato di somministrazione, un tale accertamento è difficile perché, nella maggior parte delle complesse situazioni reali, l'intero processo che va dalla realtà alla matematica e viceversa spesso implica un lavoro di collaborazione, comporta il reperimento delle risorse adeguate e richiede molto tempo.

Per illustrare il processo di matematizzazione in un esercizio di *problem solving* a più fasi, consideriamo l'esempio della prova "Fiera" eseguito da una classe di quindicenni (Romberg, 1994).

---

**Matematica: esempio 2 - UN TAVOLO DA GIOCO A UNA FIERA**

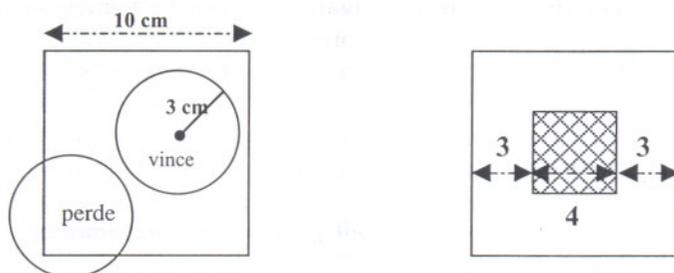
A una fiera i giocatori tirano monete su una larga scacchiera. Se una moneta tocca il bordo di una casella è persa. Se rotola fuori dalla scacchiera viene restituita al giocatore. Mentre se la moneta cade all'interno di una casella si restituisce la moneta al giocatore che vince anche un premio. Qual è la probabilità di vincere a questo gioco?





Questo esercizio è chiaramente calato nella realtà. In un primo momento gli studenti cominciano ad afferrare che la probabilità di vincere dipende dalle dimensioni relative dei quadrati e della moneta (identificando così le variabili importanti). In un secondo momento, per trasformare il problema reale in un problema matematico, essi si rendono conto che sarebbe meglio esaminare il rapporto tra la singola casella della scacchiera e un cerchio più piccolo (ritagliando così la realtà). Poi decidono di costruire un esempio specifico (usando un approccio euristico per la soluzione di problemi – “se non sai risolvere il problema dato, risolvine uno che sai risolvere”). È da notare che tutto il lavoro successivo è stato fatto in riferimento a questo esempio specifico, non alla scacchiera, al premio ecc. Nell'esempio gli studenti hanno posto che il raggio della moneta fosse di 3 cm e il lato dei quadrati di 10 cm. Essi si sono resi conto che, per vincere, il centro della moneta deve essere ad almeno 3 cm di distanza da ogni lato, altrimenti la moneta cade in parte fuori dalla casella. La superficie campione è il quadrato di 10 cm di lato, e la superficie dove si realizza l'evento vincente è un quadrato di 4 cm di lato. Le relazioni sono mostrate nel diagramma che segue (Figura 1.1).

**Figura 1.1 • Un lancio vincente e un lancio perdente (a sinistra) e la superficie campione e quella dell'evento vincente (a destra)**



La probabilità di vincere è ottenuta dal rapporto tra l'area del quadrato dello spazio campione e l'area dello spazio dell'evento vincente (nel caso dell'esempio  $p = 16/100$ ). Quindi gli studenti hanno esaminato monete di dimensioni diverse, e hanno generalizzato il problema formulando la sua soluzione in termini algebrici. Infine hanno esteso il risultato ottenuto calcolando le rispettive dimensioni della moneta e delle caselle della scacchiera in varie situazioni pratiche, hanno costruito scacchiere e hanno verificato empiricamente i risultati (traducendo la situazione matematica nei termini della situazione reale).

Occorre notare che ciascuno dei cinque aspetti della matematizzazione è presente nella soluzione di questo problema. Sebbene il problema sia complesso, tutti gli studenti di 15 anni dovrebbero capire le nozioni matematiche necessarie per risolvere il problema. Tuttavia, va rilevato che gli studenti di questa classe hanno lavorato insieme su questo esercizio per tre giorni.

In linea di principio, per stabilire se gli studenti di 15 anni siano in grado di far uso delle conoscenze matematiche acquisite per risolvere i problemi matematici che incontrano quando interagiscono con il loro mondo, occorrerebbe raccogliere informazioni circa la loro capacità di matematizzare nelle situazioni complesse. Chiaramente ciò non è possibile. Invece, il progetto PISA

ha stabilito di mettere a punto quesiti per verificare diverse componenti di questo processo. Nella sezione che segue si descrive la strategia adottata per costruire un insieme di quesiti che coprano in modo bilanciato i cinque aspetti del processo di matematizzazione e per utilizzare le risposte ottenute al fine di mettere a punto una scala di competenza da usare come indicatore della literacy matematica come la si intende nel progetto PISA.

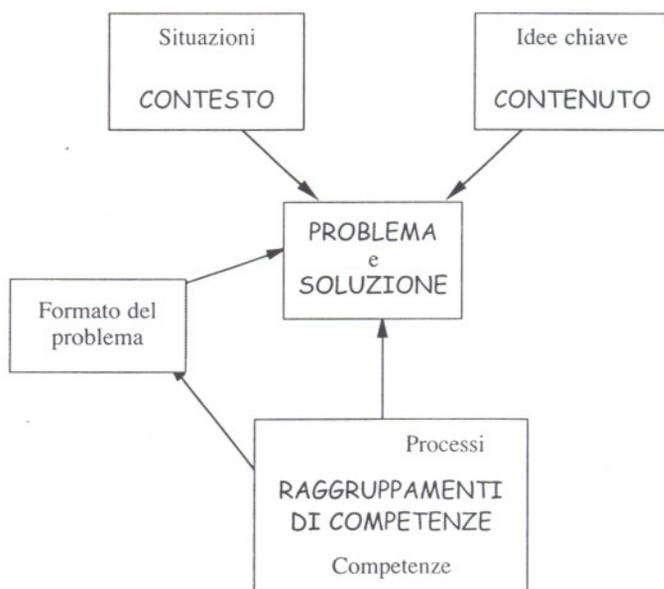
## ORGANIZZAZIONE DELL'AMBITO

Il quadro di riferimento della matematica del PISA fornisce il fondamento logico e la descrizione di come è impostata la verifica della capacità dei quindicenni di servirsi della matematica in modo fondato quando si confrontano con i problemi del mondo reale, o in termini più generali, la verifica di quanto i quindicenni siano competenti dal punto di vista matematico. Per descrivere più chiaramente l'ambito dell'indagine, devono essere distinte tre componenti:

- le *situazioni* o i *contesti* in cui sono calati i problemi,
- il *contenuto matematico* che deve essere usato per risolvere il problema, classificato in relazione ad alcune *idee chiave* (*overarching ideas*) e, aspetto fondamentale,
- le *competenze* che devono essere attivate nel processo attraverso cui il mondo reale (nel quale hanno origine i problemi) viene messo in relazione con la matematica, e dunque nella soluzione dei problemi.

Tali componenti sono rappresentate in forma schematica nella Figura 1.2, alla quale segue una spiegazione di ciascuna componente.

Figura 1.2 • Componenti dell'ambito della matematica



Il grado di competenza matematica di una persona si può vedere dal modo in cui utilizza conoscenze e abilità matematiche per risolvere i problemi. Nella vita di una persona, i problemi (e le loro soluzioni) possono presentarsi in

una molteplicità di situazioni e contesti. I problemi dell'indagine OCSE/PISA si basano sul mondo reale in un duplice senso: in primo luogo, i problemi fanno riferimento ad alcuni ambiti situazionali che sono pertinenti alla vita degli studenti, le situazioni fanno parte del mondo reale e sono indicate dal rettangolo nella parte in alto a sinistra dello schema; in secondo luogo, all'interno di quella situazione, i problemi presentano un contesto più specifico. Questo è rappresentato dal rettangolo più piccolo all'interno di quello che indica la situazione.

*Nei due esempi citati, la situazione è la comunità locale, mentre il contesto è rappresentato, nel primo caso, dall'illuminazione del parco (esempio 1) e, nel secondo, dal gioco della scacchiera alla fiera (esempio 2).*

L'altra componente del mondo reale che deve essere considerata quando si parla della competenza matematica è il contenuto matematico che una persona dovrebbe mettere in gioco nel risolvere un problema. Il contenuto matematico può essere articolato in quattro categorie che comprendono i diversi tipi di problemi che sorgono attraverso l'interazione con gli eventi quotidiani, e si basano su una concezione dei modi in cui il contenuto matematico si presenta nella realtà. Per gli obiettivi della valutazione in PISA, tali categorie sono chiamate "idee chiave" e più precisamente quantità, spazio e forma, cambiamento e relazioni, e incertezza. Un simile approccio al contenuto si differenzia in parte da quello comune nell'insegnamento della matematica e negli indirizzi curriculari normalmente adottati nelle scuole. Tuttavia, le idee chiave abbracciano grosso modo la gamma degli argomenti di matematica che gli studenti dovrebbero avere appreso. Le idee chiave sono rappresentate dal rettangolo più grande in alto a destra nel diagramma della Figura 1.2. Il contenuto usato nella soluzione di un problema è ricavato dalle idee chiave e nella figura viene rappresentato dal rettangolo più piccolo all'interno di quello delle idee chiave.

Le frecce che vanno dal "contesto" e dal "contenuto" al problema mostrano come il mondo reale (che comprende la matematica) venga a far parte di un problema.

*Il problema del parco (esempio 1) richiede conoscenze geometriche legate alle idee di spazio e forma e il problema della fiera (esempio 2) richiede (per lo meno nelle fasi iniziali) di avere a che fare con l'incertezza e con l'applicazione delle conoscenze sulla probabilità.*

I processi matematici che gli studenti applicano quando cercano di risolvere un problema vengono definiti competenze matematiche. Tali competenze sono state articolate in tre raggruppamenti (competency clusters) in relazione ai diversi processi cognitivi richiesti per risolvere vari tipi di problemi. Questi raggruppamenti riflettono il modo in cui i processi matematici sono normalmente impiegati quando gli studenti affrontano i problemi che sorgono nella loro interazione con la realtà.

La componente relativa ai processi, dunque, è raffigurata nella Figura 1.2 in primo luogo dal rettangolo più grande, che rappresenta le competenze matematiche generali, e in secondo luogo dal rettangolo più piccolo che rappresenta i tre raggruppamenti di competenze, di cui si parlerà più avanti. Le competenze specifiche necessarie per risolvere un problema saranno in relazione con la natura del problema stesso e le competenze utilizzate si riflette-

ranno sulla soluzione trovata. Questa interazione è rappresentata dalla freccia che va dai gruppi di competenza al problema.

Un'ultima freccia va dai raggruppamenti di competenze al formato del problema, a indicare che le competenze impiegate nella soluzione di un problema sono legate alla forma del problema stesso e alle sue particolari richieste.

Occorre sottolineare che le tre componenti appena descritte sono di diversa natura. Mentre le situazioni e i contesti definiscono l'ambito del problema nel mondo reale e le idee chiave riflettono il modo in cui si guarda il mondo attraverso "lenti matematiche", le competenze costituiscono il nucleo centrale della *literacy* matematica. Soltanto se gli studenti possiedono determinate competenze sono in grado di risolvere correttamente determinati problemi. Valutare la competenza matematica vuol dire accertare fino a che punto gli studenti possiedano competenze matematiche e siano in grado di usarle in situazioni problematiche.

Nei paragrafi che seguono queste tre componenti sono descritte più dettagliatamente.

### Situazioni e contesti

Un aspetto importante della definizione di competenza matematica è il confrontarsi con la matematica: utilizzare la matematica e "fare matematica" in una molteplicità di situazioni. Si è visto che, occupandosi di questioni che si prestano a essere trattate in termini matematici, la scelta dei metodi e delle rappresentazioni matematiche dipende spesso dalle situazioni in cui si presentano i problemi.

La situazione è quella porzione del mondo dello studente in cui sono collocati i compiti da svolgere. Essa si trova a una certa distanza dagli studenti. Nel progetto OCSE/PISA, la situazione considerata più prossima è la vita personale dello studente, seguita dalla vita scolastica, dal lavoro e dal tempo libero e, infine, dalla comunità locale e dalla società come la si incontra nella vita quotidiana. Le situazioni considerate più remote, invece, sono quelle scientifiche. Si definiranno e si utilizzeranno quattro situazioni-tipo quali ambiti dei problemi da risolvere: personale, scolastica/professionale, pubblica e scientifica.

Il contesto di un quesito è rappresentato dal suo scenario specifico all'interno di una situazione. Il contesto comprende tutti i singoli elementi utilizzati per formulare il problema.

Consideriamo il seguente esempio:

---

#### Matematica: esempio 3 - LIBRETTO DI RISPARMIO

Si sono versati 1000 zed su un libretto di risparmio in banca. Vi sono due possibilità: si può avere un tasso del 4% OPPURE si può avere subito dalla banca un bonus di 10 zed e un tasso del 3%. Quale opzione è più vantaggiosa dopo un anno? E dopo due anni?

---

La situazione di questo quesito è "finanza e tecnica bancaria" e fa parte della situazione comunità locale e società che PISA classifica come "pubblica". Il contesto del quesito riguarda il denaro (zed) e i tassi di interesse di un conto bancario.

È da notare che questo problema potrebbe far parte della reale esperienza di una persona che si trova in un determinato ambito del mondo reale. Esso fornisce un contesto *autentico* per l'uso della matematica, dal momento che l'applicazione della matematica a questo contesto è realmente orientata alla soluzione del problema<sup>1</sup>. Ciò differenzia il problema considerato da quelli che spesso compaiono nei libri di testo di matematica, il cui scopo principale è quello di far fare un esercizio matematico, piuttosto che utilizzare la matematica per risolvere un problema reale. Tale *autenticità* nell'uso della matematica è un aspetto importante della messa a punto e dell'analisi dei quesiti dell'indagine OCSE/PISA ed è in stretta relazione con la definizione di competenza matematica.

Bisogna anche notare che alcuni elementi del problema sono inventati, come la valuta che è fittizia. Questo elemento fittizio è stato introdotto per evitare che gli studenti di qualche Paese siano ingiustamente avvantaggiati.

La situazione e il contesto di un problema possono essere considerati anche in termini di distanza tra il problema e la matematica che esso richiede. Se un compito fa riferimento unicamente a oggetti, simboli o strutture matematiche e non ad aspetti esterni al mondo matematico, il contesto del compito viene considerato come intra-matematico e il compito viene classificato come appartenente alla situazione "scientifica". L'OCSE/PISA comprende un numero limitato di prove di questo tipo, nelle quali il contesto del problema rende esplicita la stretta connessione tra quest'ultimo e la matematica che ne sta alla base. Normalmente però, i problemi incontrati dagli studenti nella vita quotidiana non sono formulati in termini matematici espliciti. Essi si riferiscono a oggetti del mondo reale. Tali contesti sono detti "extra-matematici" ed è lo studente a doverli tradurre in forma matematica. In linea generale, l'OCSE/PISA dà spazio a compiti che si potrebbero incontrare in situazioni del mondo reale e sono calati in contesti autentici che influenzano la loro soluzione e interpretazione. È da notare che questo non esclude che nella prova vengano anche inclusi compiti con un contesto ipotetico, purché tale contesto abbia qualche elemento reale, non sia troppo distante da una situazione del mondo reale e richieda realmente l'uso della matematica per risolvere il problema, come nel seguente esempio.

---

#### **Matematica: esempio 4 - SISTEMA MONETARIO**

Sarebbe possibile introdurre un sistema monetario basato soltanto su tagli di 3 e 5? Più specificatamente, quali valori si otterrebbero su questa base? Sarebbe desiderabile un tale sistema, se fosse possibile?

---

Il problema presentato nell'esempio è un buon problema, non tanto per la sua vicinanza al mondo reale, quanto per il fatto che è interessante dal punto di vista matematico e richiede capacità legate alla *literacy* matematica. Il ricorso alla matematica per spiegare scenari ipotetici ed esplorare sistemi o situazioni alternativi, anche se improbabili, è una delle caratteristiche più importanti di tale disciplina. Tale problema può venire classificato come appartenente alla situazione "scientifica".

---

<sup>1</sup> È da notare che il termine "autentico" non vuole qui significare che i quesiti di matematica siano in un certo senso genuini e reali. Nella matematica dell'OCSE/PISA il termine "autentico" indica che l'uso della matematica è realmente funzionale alla risoluzione del problema e che quindi il problema non è una semplice occasione di esercizio matematico.

Riassumendo, nel progetto OCSE/PISA i compiti considerati migliori sono quelli che potrebbero incontrarsi in una delle molteplici situazioni del mondo reale e il cui contesto richiede realmente l'uso della matematica per risolvere il problema. Per la valutazione della competenza matematica si dà la priorità a problemi in cui soluzione e interpretazione sono legate a contesti extra-matematici, dal momento che tali problemi sono i più simili a quelli che si incontrano nella vita quotidiana.

### **Il contenuto matematico – le quattro “idee chiave”**

I concetti, le strutture e le idee matematiche sono stati messi a punto quali strumenti per organizzare i fenomeni del mondo naturale, sociale e mentale. A scuola, i programmi di matematica sono stati organizzati logicamente in ambiti di contenuto (per es. aritmetica, algebra, geometria) che riflettono branche del pensiero matematico storicamente consolidate e facilitano lo sviluppo di un programma di insegnamento strutturato. Tuttavia, nel mondo reale, i fenomeni che si prestano ad essere trattati in termini matematici non si presentano secondo la stessa organizzazione logica. Raramente i problemi sorgono in modi e contesti che permettono di riuscire a comprenderli e a risolverli applicando conoscenze provenienti da un'unico ambito. Il problema della fiera descritto precedentemente fornisce un esempio di un problema la cui soluzione comporta il ricorso a diversi ambiti della matematica.

Dal momento che l'indagine OCSE/PISA mira ad accertare la capacità degli studenti di risolvere problemi reali, la gamma dei contenuti inclusi nella valutazione è stata definita servendosi di un approccio fenomenologico per descrivere i concetti, le strutture e le idee matematiche. Questo significa che il contenuto viene descritto in relazione ai fenomeni e ai tipi di problemi per i quali è stato costruito. Tale approccio garantisce una coerenza tra l'impostazione della valutazione e la definizione dell'ambito della competenza matematica e, allo stesso tempo, copre una gamma di contenuti che comprende quanto generalmente si trova sia in altre indagini sulla matematica sia nei curricula nazionali di matematica.

Un'articolazione di tipo fenomenologico del contenuto matematico non è cosa nuova. Due pubblicazioni ben note, *On the shoulders of giants: New approaches to numeracy* (Steen, 1990) e *Mathematics: The science of patterns* (Devlin, 1994), hanno descritto la matematica in questo modo. Tuttavia, vi sono diversi termini per definire un simile approccio e le diverse categorie fenomenologiche. Tra i termini che sono stati suggeriti per definire questo approccio vi sono: “idee fondanti”, “grandi idee” o “idee fondamentali”; “concetti chiave”, “idee chiave”, “concetti di fondo”, “ambiti principali” o “problematiche”. Nel quadro di riferimento di PISA 2003 per la matematica si usa il termine “idee chiave”.

È possibile individuare molte idee chiave in matematica. Le pubblicazioni menzionate sopra elencano: modello, dimensioni, quantità, incertezza, forma, cambiamento, calcolo, ragionamento e comunicazione, movimento e cambiamento, simmetria e regolarità, posizione. Quali fra queste utilizzare nel quadro di riferimento della matematica del progetto OCSE/PISA? Per delineare l'ambito della competenza matematica è importante che la selezione delle aree problematiche segua lo sviluppo storico della disciplina, garantisca un'articolazione e un approfondimento tali da illustrare gli elementi essenziali della matematica e, allo stesso tempo, rappresenti o comprenda in modo adeguato le aree curriculari tradizionali.

Per secoli, la matematica è stata prevalentemente la scienza dei numeri ed è stata accompagnata da una scienza relativamente concreta, la geometria. Già prima del 500 a.C., Mesopotamia, Egitto e Cina videro la nascita del concetto di numero e, contemporaneamente, furono sviluppate operazioni con numeri e quantità, comprese le quantità che si ricavano da misurazioni geometriche. Il periodo compreso fra il 500 a.C. e il 300 d.C. fu l'era della matematica greca, che si identificò essenzialmente con lo studio della geometria come teoria assiomatica. Ai greci si deve la ridefinizione della matematica come scienza unificante dei numeri e delle forme. Il cambiamento successivo più importante, in seguito al quale l'algebra divenne una branca della matematica, si ebbe tra il 500 e il 1300 d.C. nel mondo islamico, in India e in Cina; da tale cambiamento derivò lo studio delle relazioni. Nel diciassettesimo secolo, con l'invenzione del calcolo (inteso come studio del cambiamento, della crescita e del limite), da parte di Newton e Leibniz, ciascuno per proprio conto, la matematica divenne lo studio integrato dei numeri, delle forme, dei cambiamenti e delle relazioni.

Il diciannovesimo e il ventesimo secolo hanno assistito all'esplosione della conoscenza matematica e dell'insieme di fenomeni e problemi che potevano essere affrontati con la matematica, comprendendo aspetti di casualità e indeterminazione. Questi sviluppi hanno reso sempre più difficile rispondere alla domanda "che cos'è la matematica?". All'inizio del nuovo millennio, molti vedono la matematica come la scienza dei modelli (*patterns*) in senso generico. È dunque possibile scegliere le idee chiave in modo da riflettere questi sviluppi: i modelli di *quantità*, di *forma e di spazio*, di *cambiamento e di relazioni* rappresentano concetti centrali ed essenziali in qualsiasi descrizione della matematica e sono il nucleo di qualsiasi curriculum sia a livello di scuola superiore che a livello universitario. Tuttavia, essere competenti (*literate*) nell'ambito della matematica significa qualcosa di più. È essenziale essere in grado di affrontare l'incertezza considerata da un punto di vista matematico e scientifico. Per questo motivo, elementi di teoria della probabilità e di statistica danno origine alla quarta idea chiave: *l'incertezza*.

Le quattro idee chiave che seguono sono utilizzate nell'indagine PISA 2003 in quanto consentono di seguire lo sviluppo storico della disciplina, di abbracciare in modo esauriente l'ambito matematico e di riflettere i temi principali del curriculum scolastico:

- *quantità*;
- *spazio e forma*;
- *cambiamento e relazioni*;
- *incertezza*.

Attraverso queste quattro idee chiave è possibile articolare il contenuto matematico in un numero di aree sufficiente a garantire che i quesiti delle prove fossero distribuiti su tutto il curriculum e che, allo stesso tempo, il loro numero fosse sufficientemente ridotto da evitare distinzioni troppo minuziose che impedirebbero di prendere in considerazione problemi fondati su situazioni reali.

Un'idea chiave può essere concepita come un insieme coerente di fenomeni e di concetti che si possono incontrare in una molteplicità di situazioni differenti. Per sua natura, ciascuna idea chiave può essere considerata come una sorta di nozione generale che ha a che fare con un qualche ambito generale

di contenuto. Questo implica che le idee chiave non possano essere delineate con precisione una in rapporto all'altra. Ciascuna di esse rappresenta piuttosto una particolare prospettiva, o punto di vista, che può essere concepito come dotato di un nucleo, di un centro di gravità, e di contorni in un certo senso indistinti che consentono l'intersezione con altre idee chiave. In teoria, ogni idea chiave si interseca con tutte le altre. Le quattro idee chiave sono descritte sinteticamente nei seguenti paragrafi e discusse più approfonditamente più avanti.

### **Quantità**

Questa idea chiave è centrata sul bisogno di quantificare per organizzare la realtà. Tra i suoi aspetti più importanti vi sono la comprensione delle dimensioni relative, il riconoscimento di modelli numerici e l'uso di numeri per rappresentare quantità e attributi quantificabili degli oggetti del mondo reale (misure e conteggi). Inoltre, la *quantità* ha a che fare con l'elaborazione e la comprensione di numeri rappresentati in vari modi.

Un aspetto saliente del lavorare con la *quantità* è il ragionamento quantitativo. Componenti essenziali del ragionamento quantitativo sono: il concetto di numero, l'uso di diverse rappresentazioni numeriche, la comprensione del significato delle operazioni, l'averne un'idea dell'ordine di grandezza dei numeri, i calcoli eleganti da un punto di vista matematico, i calcoli mentali e le stime.

### **Spazio e forma**

Dovunque intorno a noi vi sono modelli: nel linguaggio orale, nella musica, sul video, nel traffico, nelle costruzioni edili e nell'arte. Le forme possono essere considerate come modelli: case, uffici, ponti, stelle di mare, fiocchi di neve, piante topografiche delle città, quadrifogli, cristalli e ombre. I modelli geometrici possono funzionare come modelli relativamente semplici di molti tipi di fenomeni ed è possibile e desiderabile studiarli a tutti i livelli (Grünbaum, 1985).

Quando si analizzano le componenti della forma e si riconoscono le forme in diverse rappresentazioni e in diverse dimensioni, lo studio della forma e delle costruzioni comporta la ricerca di somiglianze e differenze. Lo studio delle forme è strettamente legato al concetto di "capire lo spazio". Questo significa imparare a conoscere, esplorare e conquistare lo spazio per poter vivere, respirare e muoversi in esso con una maggiore consapevolezza (Freudenthal, 1973).

Per ottenere ciò, dobbiamo essere in grado di capire le proprietà degli oggetti e le loro relative posizioni: dobbiamo essere consapevoli di come vediamo le cose e del perché le vediamo così, dobbiamo imparare a navigare attraverso lo spazio e attraverso le costruzioni e le forme. Ciò significa capire la relazione tra forme e immagini o rappresentazioni visive, come la relazione tra una città reale e le fotografie e le carte topografiche di quella città; significa anche capire come si possano rappresentare gli oggetti tridimensionali in due dimensioni, come si creino e si interpretino le ombre e che cosa sia la prospettiva e come funzioni.

## Cambiamento e relazioni

Ogni fenomeno naturale è la manifestazione di un cambiamento e nella realtà che ci circonda si possono osservare tra i fenomeni molte relazioni, sia temporanee che permanenti. La trasformazione degli organismi durante la loro crescita, il ciclo delle stagioni, il flusso e riflusso delle maree, i cicli di disoccupazione, i cambiamenti del tempo, gli indici della borsa valori non sono che alcuni esempi. Alcuni di questi processi di cambiamento comportano semplici funzioni matematiche, che possono essere lineari, esponenziali, periodiche o logistiche, sia discrete che continue, e possono essere descritti o modellizzati in base a esse. Molte relazioni, tuttavia, rientrano in più di una categoria e l'analisi dei dati è molto spesso indispensabile per determinare il tipo di relazione presente. Le relazioni matematiche assumono spesso la forma di equazioni o disequazioni, ma vi possono anche essere relazioni di natura più generale (come relazioni di equivalenza, divisibilità, inclusione, per citare solo alcuni esempi).

Pensare in termini funzionali, cioè pensare in termini di relazioni, è uno degli obiettivi disciplinari fondamentali dell'insegnamento della matematica (MAA, 1923). Le relazioni possono essere rappresentate in molti modi, tra i quali vi sono le rappresentazioni simboliche, algebriche, grafiche, tabulari e geometriche. Rappresentazioni diverse possono essere utili per scopi diversi e hanno proprietà differenti. Quindi, quando si ha a che fare con situazioni e compiti problematici, il passaggio da una rappresentazione all'altra è spesso un procedimento chiave.

## Incertezza

L'attuale "società dell'informazione" offre una gran quantità di informazioni, presentandole spesso come precise, scientifiche e dotate di un certo grado di certezza. Nella vita quotidiana, tuttavia, ci imbattiamo in risultati elettorali incerti, ponti che cedono, crolli del mercato azionario, previsioni del tempo inattendibili, pronostici inesatti sulla crescita demografica, modelli economici imprevedibili e molte altre dimostrazioni dell'incertezza del nostro mondo.

La constatazione di tale *incertezza* chiama in causa due argomenti tra loro correlati: i dati e il caso. Tali fenomeni sono oggetto di studi matematici rispettivamente nella statistica e nella teoria della probabilità. Alcune osservazioni relativamente recenti circa i curricula scolastici concordano sul fatto che la statistica e la probabilità oggi dovrebbero occupare un posto molto più importante che nel passato (*Committee of Inquiry into the Teaching of Mathematics in Schools*, 1982; LOGSE, 1990; MSEB, 1990; NCTM, 1989; NCTM, 2000).

Attività e concetti matematici specifici in questo ambito sono la raccolta e l'analisi dei dati, la loro rappresentazione/visualizzazione, la probabilità e l'inferenza statistica.

Nel paragrafo che segue si affronta l'aspetto più importante del quadro di riferimento della matematica, cioè il discorso sulle competenze che gli studenti devono attivare quando cercano di risolvere un problema. Tali competenze sono discusse complessivamente sotto il titolo di processi matematici.

## I processi matematici

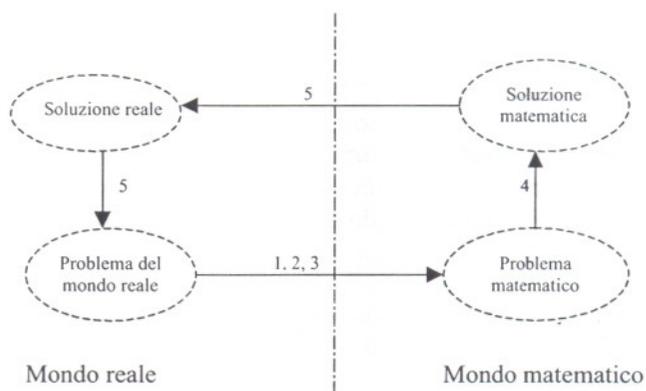
### Introduzione – la matematizzazione

Il progetto OCSE/PISA esamina la capacità degli studenti di analizzare, ragionare e comunicare idee matematiche in modo efficace nel momento in cui pongono, formulano, risolvono problemi matematici e ne interpretano le soluzioni. Tale attività di analisi e soluzione di problemi richiede, da parte degli studenti, l'uso di abilità e competenze acquisite attraverso il percorso scolastico e l'esperienza. Nell'indagine OCSE/PISA, si usa il termine "matematizzazione" per riferirsi a un processo fondamentale del quale gli studenti si servono per risolvere problemi della vita reale.

Si potrebbe affermare che Newton stesse descrivendo la "matematizzazione" quando, nel suo lavoro principale *I principi matematici della filosofia della natura*, scrisse: "Ma il nostro scopo è solo di individuare l'entità e le proprietà di tale forza partendo dai fenomeni, e di usare quello che noi scopriamo in pochi casi semplici come principi guida, attraverso i quali, per via matematica, possiamo stimare gli effetti conseguenti in casi più complessi" (Newton, 1687).

Nella presentazione iniziale delle basi teoriche del quadro di riferimento della matematica si è tracciata una descrizione della matematizzazione in cinque fasi. Tali fasi sono rappresentate nella Figura 1.3.

Figura 1.3 • Il ciclo della matematizzazione



- 1) Si parte da un problema situato nella realtà.
- 2) Si organizza il problema in base a concetti matematici e si identificano gli strumenti matematici pertinenti.
- 3) Si ritaglia progressivamente la realtà attraverso processi quali il fare supposizioni, il generalizzare e il formalizzare il problema, che mettono in evidenza le caratteristiche matematiche della situazione e trasformano il problema reale in uno matematico che rappresenti fedelmente la situazione di partenza.
- 4) Si risolve il problema matematico.
- 5) Si interpreta la soluzione matematica nei termini della situazione reale, individuando anche i limiti della soluzione proposta.



Come si vede nel diagramma della Figura 1.3, le cinque fasi possono essere riunite in tre gruppi.

Innanzitutto la matematizzazione implica che il problema venga tradotto dalla "realtà" alla matematica. Questo processo comprende operazioni quali:

- identificare gli aspetti matematici pertinenti a un problema collocato nella realtà;
- rappresentare il problema in modo diverso, cioè organizzarlo secondo concetti matematici ed effettuare supposizioni adeguate;
- capire le relazioni tra il linguaggio del problema e il linguaggio simbolico e formale richiesto per capire il problema dal punto di vista matematico;
- trovare regolarità, relazioni e *pattern*;
- riconoscere aspetti isomorfi ad altri problemi già noti;
- tradurre il problema in termini matematici, cioè in un modello matematico (de Lange 1987, p. 43).

Non appena uno studente abbia tradotto il problema in termini matematici, l'intero processo di matematizzazione può continuare all'interno della matematica. Gli studenti si porranno domande come: "C'è...?", "Se è così, quanti?", "Come posso trovare...?" usando tecniche e concetti matematici noti. Essi cercheranno di lavorare sul modello della situazione problematica che hanno costruito, di perfezionarlo, di stabilire regolarità, di identificare relazioni e di sviluppare argomentazioni matematiche solide. Tale aspetto del processo di matematizzazione viene generalmente definito "aspetto deduttivo del ciclo di modellizzazione" (Schupp, 1988, Blum, 1996). Tuttavia, in questa fase possono giocare un ruolo importante altri processi oltre a quelli strettamente deduttivi, quali:

- l'uso di diverse rappresentazioni e il passaggio da una all'altra;
- l'uso di un linguaggio simbolico, formale e tecnico e delle operazioni;
- la rifinitura e l'adattamento dei modelli matematici, l'associazione e l'integrazione dei modelli;
- l'argomentazione;
- la generalizzazione.

L'ultimo o gli ultimi passaggi nella risoluzione di un problema comportano una riflessione sull'intero processo di matematizzazione, nonché sui suoi risultati. In questo caso gli studenti devono interpretare i risultati con atteggiamento critico e devono convalidare l'intero processo. Tale riflessione deve essere presente in tutti gli stadi del processo di matematizzazione, ma è particolarmente importante nella fase conclusiva. Aspetti di questo processo di riflessione e di convalida sono:

- la comprensione delle potenzialità e dei limiti dei concetti matematici;
- la riflessione sulle argomentazioni matematiche e la spiegazione e la giustificazione dei risultati;
- la comunicazione del procedimento seguito e della soluzione trovata;
- la critica del modello e dei suoi limiti.

Nella Figura 1.3 questa fase è riportata due volte con il numero 5, una volta per indicare il processo di matematizzazione in cui si passa dalla soluzione matematica a quella reale, e l'altra nel momento in cui la soluzione reale è nuovamente messa in relazione con il problema originario del mondo reale.

## Le competenze

Il paragrafo precedente tratta i principali concetti e processi che sono messi in gioco nella matematizzazione. Una persona che affronta con successo il processo di matematizzazione nell'ambito di una molteplicità di situazioni e contesti, extra e intra-matematici, e di diverse idee chiave, deve possedere un certo numero di competenze matematiche che, nel loro insieme, possono essere considerate come costitutive della competenza matematica. Ciascuna di queste competenze può essere posseduta a diversi livelli di padronanza. Le diverse fasi del processo di matematizzazione si basano in modo differenziato su queste competenze, sia per quanto riguarda le specifiche competenze messe in gioco, sia per quanto riguarda il livello di padronanza richiesto. Per individuare e analizzare queste competenze, il progetto OCSE/PISA ha deciso di fare riferimento a otto tipiche competenze matematiche, che si basano, nella loro forma attuale, sul lavoro di Niss (1999) e dei suoi colleghi danesi. Definizioni analoghe si possono trovare nei lavori di molti altri studiosi (come mostrato da Neubrand *et al.*, 2001), ma alcuni dei termini usati vengono impiegati in modo diverso dai diversi autori.

1. *Pensiero e ragionamento.* Questa competenza consiste: nel formulare domande che sono tipiche della matematica ("C'è...?", "Se è così, quanti?", "Come troviamo...?"); nel conoscere i tipi di risposte che la matematica dà a tali domande; nel distinguere tra diversi tipi di enunciati (definizioni, teoremi, congetture, ipotesi, esempi, affermazioni di tipo condizionale); e nel comprendere e trattare la portata e i limiti di determinati concetti matematici.
2. *Argomentazione.* Questa competenza consiste: nel conoscere cosa sono le dimostrazioni matematiche e come differiscono da altri tipi di ragionamento matematico; nel seguire catene di ragionamenti matematici di diverso tipo e nel valutarne la validità; nell'avere un'idea dell'euristica ("Che cosa può o non può accadere? E perché?"); e nel creare ed esprimere ragionamenti matematici.
3. *Comunicazione.* Questa competenza consiste nel sapersi esprimere in vari modi su questioni di carattere matematico, in forma orale e scritta e nel comprendere gli enunciati scritti od orali di altre persone circa tali questioni.
4. *Modellizzazione.* Questa competenza consiste: nella strutturazione del campo o della situazione che deve essere modellizzata; nel tradurre "la realtà" in strutture matematiche; nell'interpretare i modelli matematici in termini di "realtà"; nel lavorare con un modello matematico; nel validare il modello, nel riflettere, analizzare e valutare un modello e i suoi risultati; nel comunicare ad altri il modello e i suoi risultati (compresi i limiti di tali risultati); e nel monitorare e controllare il processo di modellizzazione.
5. *Formulazione e risoluzione di problemi.* Questa competenza consiste nel porre, formulare e definire diversi tipi di problemi matematici (quali problemi "puri", "applicati", "aperti" e "chiusi") e nel risolverli in vari modi.
6. *Rappresentazione.* Questa competenza consiste: nel decodificare e codificare, tradurre, interpretare e distinguere le diverse forme di rappresentazione di oggetti e situazioni matematiche e le relazioni tra le varie rappresentazioni; nello scegliere e passare da una forma di rappresentazione a un'altra, in relazione alla situazione e allo scopo.



7. *Uso del linguaggio simbolico, formale e tecnico e delle operazioni.* Questa competenza consiste: nel decodificare e interpretare il linguaggio simbolico e formale e nel comprendere il suo rapporto con il linguaggio naturale; nel tradurre il linguaggio naturale in linguaggio simbolico/formale; nel lavorare con enunciati ed espressioni che contengano simboli e formule; e nell'usare variabili, risolvere equazioni ed effettuare calcoli.
8. *Uso di sussidi e strumenti.* Questa competenza consiste nel conoscere ed essere capaci di usare vari sussidi e strumenti (comprese le tecnologie dell'informazione) che possono facilitare l'attività matematica e nel conoscerne i limiti.

Il progetto PISA non vuole sviluppare prove che valutino individualmente le sopraccitate competenze. Fra tali competenze, infatti, esiste una considerevole sovrapposizione e, quando ci si serve della matematica, è generalmente necessario attingere simultaneamente a molte di queste competenze. Qualsiasi sforzo di valutare competenze individuali, quindi, porterebbe a quesiti artificiali e a una suddivisione inutile dell'ambito della competenza matematica. Le particolari competenze che ciascuno studente sarà in grado di mostrare varieranno considerevolmente da individuo a individuo. Ciò è in parte dovuto al fatto che tutto l'apprendimento avviene attraverso l'esperienza "con la costruzione della conoscenza individuale che si verifica attraverso i processi di interazione, negoziazione e collaborazione" (De Corte, Greer & Verschaffel, 1996, p. 510). Il progetto OCSE/PISA parte dal presupposto che la maggior parte della matematica conosciuta dagli studenti sia appresa a scuola. La comprensione di un ambito è acquisita gradualmente. Modi più formali e astratti di rappresentazione e ragionamento emergono con il tempo come conseguenza di un impegno attivo in attività designate per aiutare lo sviluppo di idee informali. La competenza matematica viene anche acquisita attraverso esperienze che comprendono interazioni in una molteplicità di situazioni o contesti sociali.

Per descrivere e presentare in modo produttivo le capacità degli studenti, come anche i loro punti di forza e di debolezza in una prospettiva internazionale, è necessaria una qualche schematizzazione. Un modo per strutturare il discorso in modo comprensibile e maneggevole consiste nel descrivere raggruppamenti di competenze (*clusters of competencies*), basati sui tipi di richieste cognitive che sono necessarie per risolvere diversi problemi matematici.

### ***I raggruppamenti di competenze***

Il progetto PISA ha scelto di dividere le competenze e i processi cognitivi che esse mettono in gioco in tre diversi raggruppamenti: il raggruppamento della *riproduzione*, quello delle *connessioni* e quello della *riflessione*. Nei paragrafi che seguono si descrivono tali raggruppamenti e il modo in cui ciascuna competenza è messa in gioco all'interno di ciascuno di essi.

#### ***Il raggruppamento della riproduzione***

Le competenze che rientrano in questo raggruppamento consistono nella riproduzione di conoscenze note e comprendono quelle più comunemente usate negli accertamenti standardizzati e nelle verifiche scolastiche. Tali competenze sono la conoscenza di dati di fatto e di rappresentazioni di problemi comuni, l'identificazione di equivalenze, il ricordo di argomenti e pro-

prietà matematiche note, l'esecuzione di procedure di routine, l'applicazione di algoritmi standard e di abilità tecniche, la manipolazione di espressioni con simboli e formule standard e l'esecuzione di calcoli.

1. *Pensiero e ragionamento.* Questa competenza consiste: nel formulare domande di base ("Quanti sono?", "Quanto fa...?") e nel comprendere le rispettive risposte ("Sono tanti..." "Fa tot..."); nel distinguere tra definizioni ed asserzioni; nel comprendere e manipolare concetti matematici nel tipo di contesto in cui sono stati originariamente introdotti o in cui sono stati successivamente esercitati.
2. *Argomentazione.* Questa competenza consiste nel seguire e nel motivare processi quantitativi standard (compresi processi di calcolo), affermazioni e risultati.
3. *Comunicazione.* Questa competenza consiste nel comprendere e nell'esprimersi, in forma orale e scritta, su semplici questioni matematiche, quali assegnare un nome e riconoscere le proprietà fondamentali di oggetti familiari, citare calcoli e risultati, solitamente in un'unica direzione.
4. *Modellizzazione.* Questa competenza consiste: nel riconoscere, richiamare alla mente, attivare e sfruttare modelli conosciuti e ben strutturati; nell'interpretare i modelli matematici in termini di "realtà" e viceversa; nel comunicare ad altri in modo semplice i risultati del modello.
5. *Formulazione e risoluzione di problemi.* Questa competenza consiste nel porre e formulare problemi matematici riconoscendo e riproducendo in forma chiusa problemi standard conosciuti, puri o applicati, e nel risolvere, solitamente in un'unica direzione, tali problemi ricorrendo ad approcci e procedure standard.
6. *Rappresentazione.* Questa competenza consiste nel decodificare, codificare e interpretare rappresentazioni standard, conosciute e sperimentate, di oggetti matematici ben noti. Il passare da una forma di rappresentazione a un'altra entra in gioco solo nel caso in cui tale passaggio sia parte integrante della rappresentazione stessa.
7. *Uso del linguaggio simbolico, formale e tecnico e delle operazioni.* Questa competenza consiste: nel decodificare e interpretare un linguaggio simbolico e formale semplice e consueto in contesti e situazioni conosciute; nel lavorare con semplici enunciati ed espressioni che contengono simboli e formule; e nell'usare variabili, risolvere equazioni ed effettuare calcoli con procedure di routine.
8. *Uso di sussidi e strumenti.* Questa competenza consiste nel conoscere ed essere capaci di usare vari sussidi e strumenti in contesti, situazioni e modi simili a quelli nei quali essi sono solitamente introdotti e usati.

I quesiti che accertano le competenze che rientrano in questo raggruppamento potrebbero essere definiti con i seguenti descrittori: riproduzione di materiale già conosciuto ed esecuzione di operazioni di routine.



Esempi di quesiti del Raggruppamento della Riproduzione

**Matematica: esempio 5**

Risolvi la seguente equazione  $7x - 3 = 13x + 15$

**Matematica: esempio 6**

Qual è la media tra 7, 12, 8, 14, 15, 9?

**Matematica: esempio 7**

Scrivi 69% sotto forma di frazione

**Matematica: esempio 8**

La linea  $m$  è detta \_\_\_\_\_ del cerchio



**Matematica: esempio 9**

Su un libretto di risparmio bancario vengono depositati 1000 zed, a un interesse del 4%. Quanti zed ci saranno sul conto bancario dopo un anno?

Per delineare in modo più chiaro la delimitazione di questo raggruppamento, l'esempio 3 fornisce un esempio di quesito che NON appartiene a esso. Per la maggior parte degli studenti, questo problema comporta più della semplice applicazione di procedure di routine, poiché richiede l'applicazione di una catena di ragionamenti e di una sequenza di calcoli che non rientrano nelle competenze del raggruppamento della riproduzione.

### Il raggruppamento delle connessioni

Le competenze del raggruppamento delle *connessioni* presuppongono le competenze della *riproduzione* in quanto estendono l'attività di soluzione di problemi a situazioni che non sono di semplice routine, ma che chiamano in causa ambiti comunque familiari o semi-familiari. Esse possono essere descritte come segue:

1. **Pensiero e ragionamento.** Questa competenza consiste nel formulare domande ("Come trovo?", "A quale matematica devo ricorrere per...?") e nel comprendere le relative risposte (che sono fornite per mezzo di tabelle, grafici, espressioni algebriche, figure ecc.), nel distinguere tra definizioni ed asserzioni e fra diversi tipi di asserzione, nel comprendere e manipolare concetti matematici in contesti un po' diversi da quelli in cui sono stati originariamente introdotti o nei quali sono stati successivamente esercitati.
2. **Argomentazione.** Questa competenza consiste nel formulare semplici ragionamenti a carattere matematico senza distinguere fra dimostrazioni e forme più articolate di argomentazione o di ragionamento, nel seguire catene di ragionamenti matematici di diverso tipo e nel valutarne la validità; nell'avere un'idea dell'euristica ("Che cosa può o non può accadere? E perché?", "Che cosa sappiamo e che cosa vogliamo ottenere?").
3. **Comunicazione.** Questa competenza consiste nel comprendere e nell'esprimersi, in forma orale e scritta, su questioni matematiche, dall'assegnare un nome e riconoscere le proprietà fondamentali di oggetti familiari, allo spiegare calcoli e risultati (solitamente in più di una direzione), all'illustrare problemi che comprendono relazioni. Infine tale competenza com-

porta anche la comprensione di enunciati scritti o orali emessi da altre persone riguardanti tali problemi.

4. *Modellizzazione*. Questa competenza consiste nella strutturazione del campo o della situazione che deve essere modellizzata, nel tradurre "la realtà" in strutture matematiche all'interno di contesti che, pur non essendo eccessivamente complessi, sono comunque diversi da quelli ai quali gli studenti sono abituati. Essa consiste, inoltre, nell'interpretare modelli e risultati matematici in termini di "realtà", e viceversa, nonché aspetti di comunicazione del modello e dei suoi risultati.
5. *Formulazione e risoluzione di problemi*. Questa competenza consiste nel porre e formulare problemi matematici andando oltre la riproduzione in forma chiusa di problemi standard conosciuti puri o applicati, nel risolvere tali problemi usando approcci e procedure standard, ma anche processi originali di problem solving che uniscono aree diverse della matematica e differenti metodi di rappresentazione e comunicazione (schemi, tabelle, grafici, parole e figure).
6. *Rappresentazione*. Questa competenza consiste nel decodificare, codificare e interpretare rappresentazioni conosciute o meno conosciute di oggetti matematici, nello scegliere e passare da una forma di rappresentazione di oggetti e situazioni matematiche a un'altra, nel tradurre e distinguere fra diverse forme di rappresentazione.
7. *Uso del linguaggio simbolico, formale e tecnico e delle operazioni*. Questa competenza consiste nel decodificare e interpretare un linguaggio simbolico e formale all'interno di contesti e situazioni meno conosciuti, nel lavorare con enunciati ed espressioni che contengono simboli e formule e nell'usare variabili, risolvere equazioni ed effettuare calcoli con procedure note.
8. *Uso di sussidi e strumenti*. Questa competenza consiste nel conoscere ed essere capaci di usare vari sussidi e strumenti in contesti, situazioni e modi diversi da quelli nei quali essi sono stati introdotti e usati.

I quesiti che rientrano in questa classe di competenze generalmente richiedono che si dimostri di saper integrare e mettere in connessione elementi che fanno parte di varie idee chiave, o dei diversi filoni curriculari della matematica, oppure di saper collegare diverse rappresentazioni di un problema.

I quesiti che accertano le competenze del raggruppamento delle *connessioni* potrebbero essere definiti dai seguenti descrittori: integrazione, connessione e un qualche ampliamento di materiali già conosciuti.

#### *Esempi di quesiti del Raggruppamento delle Connessioni*

Un primo esempio di quesito di Raggruppamento delle *connessioni* è stato fornito con l'esempio 3, *Libretto di risparmio*. Altri esempi di quesiti del raggruppamento delle *connessioni* sono i seguenti.

---

#### **Matematica: esempio 10** - DISTANZA

Maria abita a due chilometri di distanza dalla scuola, Martina a cinque. Quanto abitano lontane Maria e Martina l'una dall'altra?

---



Quando questo problema fu inizialmente presentato agli insegnanti, molti di loro respinsero il quesito perché troppo facile: "Si poteva facilmente vedere che la risposta era 3 chilometri". Un altro gruppo di insegnanti reagì dicendo che non era un buon quesito perché non aveva risposta, cioè non aveva una soluzione numerica univoca. Una terza reazione fu che non era un buon quesito perché aveva più possibilità di risposta, dal momento che senza ulteriori informazioni tutto quello che si può concludere è che le due ragazze vivono a una distanza che va dai 3 ai 7 chilometri, e questa indeterminatezza non è una caratteristica positiva per un quesito. Un piccolo gruppo di insegnanti ritenne che fosse un ottimo quesito, perché imponeva di capire la domanda, che fosse un vero compito di problem solving perché non aveva una soluzione già nota, e che fosse un bel compito matematico, per quanto non si potesse prevedere come gli studenti avrebbero risolto il problema. È sulla base di questo ultimo punto di vista che questo problema viene fatto rientrare tra le competenze del raggruppamento delle *connessioni*.

---

**Matematica: esempio 11 - AFFITTO DI UN UFFICIO**

I due annunci che seguono sono apparsi su un quotidiano di un Paese la cui valuta è costituita dagli zed.

PALAZZINA A	PALAZZINA B
Spazio uso ufficio disponibile:	Spazio uso ufficio disponibile:
58 - 95 metri quadrati 475 zed al mese	35 - 260 metri quadrati 90 zed all'anno per metro quadrato
100 - 120 metri quadrati 800 zed al mese	

Se in quel Paese un'azienda è interessata ad affittare un ufficio di  $110 \text{ m}^2$  per un anno, in quale palazzina, la A o la B, dovrebbe prendere in affitto i locali uso ufficio per ottenere il prezzo più conveniente? Scrivi i passaggi che fai per arrivare alla risposta. [© IEA/TIMSS]

---

**Matematica: esempio 12 - LA PIZZA**

Una pizzeria prepara due pizze dello stesso spessore, ma di diverse dimensioni. La più piccola ha un diametro di 30 cm e costa 30 zed. La più grande ha un diametro di 40 cm e costa 40 zed. [© PRIM, Stockholm Institute of Education]

Quale delle due pizze è più conveniente? Spiega come sei arrivato alla risposta.

---

In entrambi questi problemi gli studenti devono tradurre situazioni del mondo reale in linguaggio matematico, costruire un modello matematico che consenta di effettuare gli opportuni confronti, verificare che la soluzione ottenuta sia adeguata al contesto del problema di partenza e comunicare i risultati del proprio lavoro. Queste sono tutte attività che rientrano nel raggruppamento delle *connessioni*.

### Il raggruppamento della riflessione

Le competenze di questo raggruppamento richiedono un elemento di riflessione da parte degli studenti sui processi richiesti o utilizzati per risolvere un problema. Esse sono legate all'abilità degli studenti di pianificare strategie di soluzione e di applicarle affrontando ambiti problematici più complessi e meno familiari rispetto a quelli del raggruppamento delle *connessioni*. Oltre alle competenze descritte nei paragrafi precedenti, il raggruppamento della *riflessione* comprende le seguenti competenze:

1. *Pensiero e ragionamento*. Questa competenza consiste nel formulare domande ("Come trovo?", "A quale matematica devo ricorrere per...?", "Quali sono gli aspetti essenziali di questo problema o situazione?") e nel comprendere i corrispondenti tipi di risposte (fornite per mezzo di tabelle, grafici, espressioni algebriche, figure, specifiche di punti chiave, ecc.), nel distinguere tra definizioni, teoremi, congetture, ipotesi e affermazioni che riguardano casi particolari e nel riflettere su tali distinzioni o nell'articolarle, nel comprendere e manipolare concetti matematici in contesti nuovi o complessi, nel comprendere e manipolare la portata e i limiti di determinati concetti matematici e nel generalizzare i risultati.
2. *Argomentazione*. Questa competenza consiste nel formulare semplici ragionamenti di carattere matematico distinguendo fra dimostrazioni e forme più articolate di argomentazione o di ragionamento, nel creare catene di ragionamenti matematici di diverso tipo e nel valutarne la validità; nel far ricorso all'euristica ("Che cosa può o non può accadere?", "Quale può essere il caso? E perché?", "Che cosa sappiamo e che cosa vogliamo ottenere?", "Quali fra le proprietà sono essenziali?", "In che relazione si pongono gli oggetti?").
3. *Comunicazione*. Questa competenza consiste nel comprendere enunciati e nel sapersi esprimere, in forma orale e scritta, su questioni di carattere matematico, che vanno dal semplice assegnare un nome e riconoscere le proprietà fondamentali di oggetti noti, allo spiegare calcoli e risultati (solitamente in più di una direzione) fino all'illustrare problemi caratterizzati da relazioni complesse, comprese relazioni logiche. Infine tale competenza comporta anche la comprensione di enunciati scritti o orali emessi da altre persone e riguardanti tali problemi.
4. *Modellizzazione*. Questa competenza consiste nella strutturazione del campo o della situazione che deve essere modellizzata, nel tradurre "la realtà" in strutture matematiche all'interno di contesti che potrebbero essere complessi o molto diversi da quelli ai quali gli studenti sono abituati, nell'interpretare modelli e risultati matematici in termini di "realtà", e viceversa, nonché aspetti di comunicazione dei risultati del modello (racogliere informazioni e dati, monitorare il processo di modellizzazione e validare il modello risultante dal processo stesso). Tale competenza comprende inoltre il riflettere, analizzando, il criticare e l'impegnarsi in comunicazioni più complesse riguardanti i modelli e la modellizzazione.
5. *Formulazione e risoluzione di problemi*. Questa competenza consiste nel porre e formulare problemi matematici in un modo che vada ben oltre la riproduzione in forma chiusa di problemi standard conosciuti puri o applicati, nel risolvere tali problemi ricorrendo ad approcci e procedure standard o a



processi originali di problem solving che uniscano aree diverse della matematica e differenti metodi di rappresentazione e comunicazione (schemi, tabelle, grafici, parole e figure). Essa, inoltre, implica una riflessione sulle strategie e sulle soluzioni.

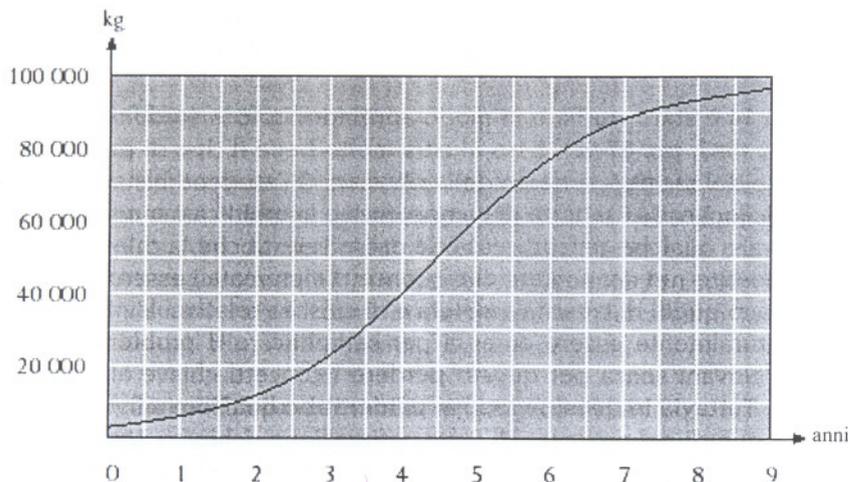
- 6. *Rappresentazione.* Questa competenza consiste nel decodificare, codificare e interpretare rappresentazioni note o meno note di oggetti matematici, nello scegliere e passare da una forma di rappresentazione di oggetti e situazioni matematiche a un'altra, nel tradurre e distinguere fra diverse forme di rappresentazione. Essa implica inoltre una combinazione creativa di rappresentazioni differenti e la creazione di rappresentazioni originali.
- 7. *Uso del linguaggio simbolico, formale e tecnico e delle operazioni.* Questa competenza consiste nel decodificare e interpretare un linguaggio simbolico e formale in contesti e situazioni sconosciute, nel lavorare con enunciati ed espressioni che contengono simboli e formule e nell'usare variabili, risolvere equazioni ed effettuare calcoli. Essa implica inoltre la capacità di affrontare enunciati e termini complessi e un linguaggio simbolico o formale cui non si è abituati e nel tradurre in linguaggio naturale il linguaggio simbolico/formale.
- 8. *Uso di sussidi e strumenti.* Questa competenza consiste nel conoscere ed essere capaci di usare sussidi e strumenti, conosciuti o meno, in contesti, situazioni e modi assai diversi da quelli nei quali essi sono solitamente introdotti e usati. Essa implica inoltre la conoscenza dei limiti di tali sussidi e strumenti.

I quesiti che accertano le competenze del raggruppamento della *riflessione* potrebbero essere definiti dai seguenti descrittori: ragionamento avanzato, argomentazione, astrazione, generalizzazione e modellizzazione applicate a nuovi contesti.

Esempi di quesiti del raggruppamento della *riflessione*

**Matematica: esempio 13** - CRESCITA DEI PESCI

In un corso d'acqua sono stati immessi alcuni pesci. Il grafico mostra l'andamento della crescita del peso complessivo dei pesci in quel corso d'acqua.



Supponiamo che un pescatore decida di aspettare un certo numero di anni prima di cominciare a pescare da questo corso d'acqua. Quanti anni dovrà aspettare per ottenere il numero il più alto possibile di pesci da pescare annualmente da quell'anno in poi?

Spiega le ragioni della tua risposta

---

**Matematica: esempio 14 - BILANCIO**

In un Paese, il bilancio nazionale per la difesa nel 1980 è di 30 milioni di dollari. Il bilancio complessivo in quell'anno è di 500 milioni di dollari. L'anno successivo il bilancio per la difesa è di 35 milioni di dollari, mentre il bilancio totale è di 605 milioni di dollari. Durante il periodo coperto dai due budget l'inflazione è ammontata al 10%.

- A. Sei invitato a tenere una conferenza per una società pacifista. Ti prefiggi di dimostrare che il bilancio della difesa durante quel periodo è diminuito. Spiega come faresti.
- B. Sei invitato a tenere una conferenza in un'accademia militare. Ti prefiggi di dimostrare che il bilancio della difesa durante quel periodo è aumentato. Spiega come faresti.

Fonte: de Lange e Verhage (1992). Con il permesso dell'editore.

---

È chiaro che l'esempio 13 si accorda con la definizione di soluzione di problemi matematici situati in contesti reali. Gli studenti devono mettere a punto una loro strategia e argomentazione nei confronti di un problema piuttosto complesso e non familiare. La complessità risiede in parte nel fatto che occorre collegare in modo ragionato l'informazione presentata in forma grafica e nel testo, in parte nel fatto che non c'è una risposta immediatamente evidente. Essi devono leggere il grafico e capire, per esempio, che il tasso di crescita raggiunge il punto massimo dopo circa cinque anni. Per risolvere correttamente il problema gli studenti devono riflettere sulla soluzione man mano che la elaborano e ragionare circa l'adeguatezza delle strategie che impiegano. Inoltre il problema richiede una dimostrazione e una indicazione delle "prove". Una possibilità è quella di usare il metodo di procedere per tentativi ed errori, per esempio provando a vedere cosa accade se si aspettano solo tre anni, e così via. Se si aspetta fino al termine del quinto anno si può ottenere una abbondante pesca ogni anno, pari a 20.000 kg di pesce. Se non è possibile aspettare così a lungo e si comincia la pesca un anno prima, se ne potranno pescare solo 17.000 kg, mentre se si aspetta troppo a lungo (sei anni) se ne pescheranno solo 18.000. Quindi il risultato migliore si ottiene cominciando a pescare dopo cinque anni.

L'esempio 14 è stato studiato in modo approfondito con studenti di 16 anni (de Lange, 1987, pp. 87-90). Esso illustra molto bene il tipo di problemi che fanno parte del raggruppamento della *riflessione*. Gli studenti hanno immediatamente riconosciuto l'aspetto di competenza e in molti casi sono stati in grado di operare qualche generalizzazione dal momento che la chiave della soluzione consiste nel riconoscere che i concetti matematici essenziali in questo caso sono quelli di crescita assoluta e di crescita relativa. L'inflazione potrebbe naturalmente essere omessa per semplificare il problema per studenti più giovani senza per questo perdere i concetti chiave alla base del problema. Tuttavia in questo modo si perderebbe qualcosa a livello di complessità e quindi nel processo di matematizzazione richiesto. Un altro modo per rendere il quesito più "facile" è quello di presentare i dati sotto forma di



tabella o di schema. Questi aspetti della matematizzazione non sarebbero così più richiesti agli studenti, che potrebbero cominciare a lavorare direttamente al nocciolo del problema.

Figura 1.4. • Diagramma dei raggruppamenti di competenze

Competenza matematica		
<b>Raggruppamento della riproduzione</b>	<b>Raggruppamento delle connessioni</b>	<b>Raggruppamento della riflessione</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Rappresentazioni e definizioni standard</li> <li>• Calcoli di routine</li> <li>• Procedure di routine</li> <li>• Analisi e soluzione di problemi di routine</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Modellizzazione</li> <li>• Analisi e soluzione di problemi standard, traduzione e interpretazione</li> <li>• Uso di molteplici metodi ben definiti</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Formulazione, analisi e soluzione di problemi complessi</li> <li>• Riflessione e intuizione</li> <li>• Approccio matematico creativo</li> <li>• Uso di molteplici metodi complessi</li> <li>• Generalizzazione</li> </ul>

### Riepilogo dei processi matematici nell'ambito della matematica dell'OCSE/PISA

La Figura 1.4 presenta un diagramma dei raggruppamenti di competenze e sintetizza le loro differenze.

Le descrizioni delle competenze nelle pagine precedenti potrebbero servire a classificare i quesiti di matematica e, dunque, ad assegnarli a uno o all'altro dei raggruppamenti di competenze. Un modo per fare ciò potrebbe consistere nell'analizzare quanto il quesito richiede, assegnando al quesito un punteggio per ciascuna delle otto competenze, a seconda di quale dei tre raggruppamenti fornisce la descrizione più calzante del problema. Nel caso in cui qualcuna delle competenze raggiungesse un punteggio tale da poter essere assegnata al raggruppamento della *riflessione*, il quesito deve essere compreso in tale raggruppamento. Se ciò non si verificasse, ma una o più competenze corrispondessero a qualcuno dei descrittori del raggruppamento delle *connessioni*, allora il quesito dovrebbe essere assegnato a quel raggruppamento. Altrimenti, il quesito dovrebbe essere assegnato al raggruppamento della *riproduzione*, giacché tutte le competenze ricadrebbero nelle descrizioni di tale raggruppamento.

## LA VALUTAZIONE DELLA COMPETENZA MATEMATICA

### Caratteristiche dei compiti

Nei paragrafi precedenti, è stato definito l'ambito della competenza matematica come essa è intesa nel progetto OCSE/PISA ed è stata descritta la struttura del quadro di riferimento della valutazione di tale competenza. Il paragrafo che segue esamina più approfonditamente le caratteristiche dei compiti di valutazione utilizzati. In particolare si descrivono la natura dei

### La natura dei compiti della matematica nel progetto PISA

Dal momento che l'OCSE/PISA è una valutazione internazionale delle compe-



tenze dei quindicenni, tutti i quesiti delle prove dovrebbero essere adatti agli studenti quindicenni dei Paesi dell'OCSE.

I quesiti sono normalmente costituiti da un testo o da un'informazione stimolo, da un'introduzione alla domanda, dalla domanda vera e propria e dalla soluzione richiesta. Inoltre, nel caso dei quesiti non a scelta multipla, viene messo a punto un dettagliato schema di correzione per consentire ai correttori dei diversi Paesi di assegnare un punteggio alle risposte degli studenti in modo affidabile e uniforme.

In un precedente paragrafo si è parlato delle situazioni che devono essere prese in considerazione per i quesiti di matematica. Per il progetto OCSE/PISA 2003, ciascun quesito è ambientato in uno dei quattro tipi di situazioni: personale, scolastica/professionale, pubblica e scientifica.

Inoltre, si sono preferiti i quesiti con contesti che si possono considerare come *autentici*. Questo significa che si ritengono migliori i compiti simili a quelli che si incontrano nel mondo reale, cioè caratterizzati da un contesto nel quale l'uso della matematica per risolvere il problema è autentico. Per la valutazione della competenza matematica si preferiscono problemi le cui soluzioni e interpretazioni sono legate a contesti extra-matematici.

I quesiti dovrebbero essere in relazione principalmente a una delle categorie di problemi sopra descritte (idee chiave). La selezione dei quesiti della prova matematica di PISA 2003 garantisce che le quattro idee chiave siano ben rappresentate. I quesiti, inoltre, dovrebbero mettere in gioco uno o più processi matematici e dovrebbero rientrare principalmente in uno dei raggruppamenti di competenze.

Nello sviluppo e nella selezione dei quesiti viene attentamente considerato il livello di capacità di lettura richiesto per affrontarli con successo. La loro formulazione è la più semplice e diretta possibile. Si è anche cercato di evitare quesiti con contesti che potrebbero creare svantaggi culturali.

I quesiti selezionati rappresentano un'ampia gamma di difficoltà, che corrisponde alla gamma altrettanto ampia di abilità degli studenti coinvolti nella valutazione, e le principali classificazioni del quadro di riferimento. Gli indici di difficoltà dei quesiti sono stabiliti nello studio pilota che precede la selezione dei quesiti per lo studio principale dell'OCSE/PISA.

### **Tipi di quesito**

Quando si mettono a punto strumenti di valutazione occorre considerare attentamente l'impatto del formato dei compiti sulle prestazioni degli studenti e quindi sulla definizione del costrutto valutato. Questo problema è particolarmente rilevante in un progetto come l'OCSE/PISA nel quale la dimensione dell'indagine, su grandi campioni e internazionale, pone seri vincoli rispetto al tipo di formati utilizzabili per i quesiti.

Nell'indagine OCSE/PISA, la valutazione della competenza matematica avviene per mezzo di una batteria di prove con quesiti a risposta aperta articolata, a risposta aperta univoca e a scelta multipla. Le prove contengono un numero pressappoco uguale di ciascun tipo di quesiti.



Sulla base dell'esperienza del primo ciclo di PISA (2000), i quesiti a scelta multipla sono generalmente considerati più adatti per valutare i raggruppamenti di competenze della *riproduzione* e delle *connessioni*. L'esempio 15 mostra un quesito che riguarda il raggruppamento di competenze delle *connessioni* e che ha un numero limitato di alternative. Per risolvere questo problema gli studenti devono tradurlo in termini matematici, mettere a punto un modello per rappresentare la scansione periodica descritta nel contesto e ripetere la sequenza estendendo il modello in modo da far combaciare il risultato con una delle opzioni proposte.

#### Matematica: esempio 15 - LA FOCA

Una foca deve respirare anche mentre dorme. Martino ha osservato una foca per un'ora. All'inizio della sua osservazione, la foca si è immersa nel fondo del mare e ha cominciato a dormire. Durante gli 8 minuti successivi è ritornata lentamente a galla e ha preso fiato. Dopo tre minuti era nuovamente sul fondo del mare e l'intero processo si è ripetuto in modo molto regolare.

Dopo un'ora, la foca stava:

- A. sul fondo del mare.
- B. risalendo a galla.
- C. prendendo fiato.
- D. scendendo sul fondo.

Nel caso di altre competenze e processi più complessi, si preferisce spesso far uso di altri tipi di quesiti. I quesiti a risposta aperta univoca consentono di porre lo stesso tipo di domande dei quesiti a scelta multipla, ma gli studenti devono produrre una risposta che può essere facilmente classificata come corretta o errata. Per i quesiti che hanno questo formato, è più improbabile che lo studente tiri a indovinare e non è necessario fornire informazioni plausibili errate (che influenzano il costrutto che si sta valutando). Per esempio, nel problema presentato nell'esempio 16 c'è una risposta corretta e molte possibili risposte errate.

#### Matematica: esempio 16 - MARATONA DI ROTTERDAM

Tepla Loroupe ha vinto la maratona di Rotterdam nel 1998. "È stato facile", ha detto, "il percorso era quasi pianeggiante".

Qui è mostrato un grafico delle variazioni altimetriche del percorso della maratona di Rotterdam:



Quale era la differenza tra il punto più alto e quello più basso del percorso?

\_\_\_\_\_ m

I quesiti a risposta aperta articolata richiedono una risposta più lunga da parte degli studenti, e la produzione di una risposta implica spesso operazioni cognitive di livello superiore. Spesso tali quesiti richiedono agli studenti non solo di produrre una risposta, ma anche di esplicitare i passaggi eseguiti o di spiegare come sono giunti alla risposta. La caratteristica fondamentale dei quesiti a risposta aperta articolata è che essi permettono agli studenti di dimostrare le proprie capacità fornendo soluzioni a diversi livelli di complessità matematica. Il quesito presentato nell'esempio 17 è di questo tipo.

#### Matematica: esempio 17 - INDONESIA

L'Indonesia si trova tra la Malesia e l'Australia. Nella seguente tabella sono riportati alcuni dati sulla popolazione dell'Indonesia e la sua distribuzione nelle varie isole:

Regione	Estensione (km <sup>2</sup> )	Percentuale rispetto all'area totale	Popolazione nel 1980 (in milioni)	Percentuale dell'intera popolazione
Java /Madura	132 187	6.95	91 281	61.87
Sumatra	473 606	24.86	27 981	18.99
Kalimantan (Borneo)	539 460	28.32	6 721	4.56
Sulawesi (Celebes)	189 216	9.93	10 377	7.04
Bali	5 561	0.30	2 470	1.68
Irian Java	421 981	22.16	1 145	5.02
	1 905 569	100.00	147 384	100.00

Una delle principali difficoltà dell'Indonesia è la distribuzione ineguale della popolazione nelle varie isole. Dalla tabella si può vedere che Java, che occupa meno del 7% dell'area totale, ha quasi il 62% della popolazione totale.

Richiesta: Disegna un grafico (o alcuni grafici) che mostri l'ineguale distribuzione della popolazione indonesiana.

Fonte: de Lange e Verhage (1992). Con il permesso dell'editore.

In PISA 2003, circa un terzo dei quesiti di matematica è costituito da quesiti a risposta aperta articolata. Tali quesiti richiedono un lavoro di codifica da parte di correttori, formati a tale fine, che utilizzano uno schema di correzione la cui applicazione può richiedere un giudizio basato su una competenza professionale. Dal momento che è possibile che si registrino disaccordi tra i correttori di tali quesiti, PISA analizza l'attendibilità delle correzioni per controllare il grado di disaccordo. Precedenti esperienze in questo campo mostrano che è possibile mettere a punto schemi di correzione chiari e ottenere punteggi affidabili.

In alcuni casi la prova è costituita da un'unità, nella quale diversi quesiti sono legati a una informazione-stimolo comune. I compiti caratterizzati da questo formato permettono agli studenti di confrontarsi con un contesto o un problema, ponendo una serie di domande di complessità crescente. Le prime domande sono generalmente a scelta multipla o a risposta aperta univoca, mentre quelle successive sono generalmente a risposta aperta articolata. Questo formato può essere usato per valutare ciascun raggruppamento di competenze.



Uno dei motivi per cui si fa ricorso a prove caratterizzate da uno stimolo comune è che esse permettono di riprodurre problemi realistici che riflettono la complessità della vita reale. Un'altra ragione è costituita dal fatto che essi consentono un uso efficiente del tempo della valutazione, perché riducono il tempo necessario allo studente per "entrare" nell'argomento. Si sottolinea la necessità di rendere ciascun punteggio assegnato indipendente dagli altri all'interno del compito e ciò viene preso in considerazione sia nella messa a punto dei compiti di PISA che nella codifica delle risposte e nell'assegnazione dei punteggi. Infine, viene riconosciuta l'importanza di minimizzare l'errore che può derivare dall'uso di un numero troppo ristretto di situazioni problematiche.

## Struttura della valutazione

Le prove di matematica di PISA 2003 sono costituite da materiali il cui tempo totale di somministrazione è di 210 minuti. I quesiti selezionati sono divisi in sette pacchetti, ciascuno dei quali richiede un tempo di somministrazione di circa 30 minuti. Tali pacchetti sono riuniti in fascicoli secondo uno schema di rotazione delle prove.

Il tempo totale dello strumento di valutazione della matematica è distribuito nel modo più equilibrato possibile tra le quattro idee chiave (*quantità, spazio e forma, cambiamento e relazioni e incertezza*), e le quattro situazioni descritte nel quadro di riferimento (*personale, scolastica/professionale, pubblica e scientifica*). La proporzione dei quesiti che riflettono i tre raggruppamenti di competenze (*riproduzione, connessioni e riflessione*) è circa di 1:2:1. Circa un terzo dei quesiti è a scelta multipla, un terzo a risposta aperta univoca e un terzo a risposta aperta articolata.

## Presentazione dei livelli di competenza matematica

Per presentare i risultati delle prove di PISA verrà messa a punto una scala di competenza a cinque livelli (Masters e Forster, 1996; Masters, Adams e Wilson, 1999). La scala sarà messa a punto con procedure statistiche usando l'approccio dell'Item Response Modelling per costruire una scala di misura con dati di tipo ordinale. La scala complessiva sarà usata per descrivere le prestazioni in relazione a cinque livelli di abilità e permetterà di classificare i Paesi in base a tali livelli, fornendo così un quadro di riferimento per il confronto internazionale.

Si considererà la possibilità di costruire diverse scale indipendenti per la presentazione dei risultati. Tali scale potrebbero essere basate sui tre raggruppamenti di competenze o sulle quattro idee chiave. La costruzione di tali scale verrà decisa sulla base di diverse considerazioni, tra cui vi sono l'analisi dei parametri psicometrici delle prove che sarà condotta nel corso dell'analisi dei dati di PISA. Per rendere possibile la costruzione di diverse scale, è necessario che le prove di PISA comprendano un numero sufficiente di quesiti per ciascuna delle possibili categorie di presentazione dei risultati. Inoltre, i quesiti all'interno di ciascuna categoria dovranno coprire una gamma di difficoltà sufficientemente ampia.

I raggruppamenti di competenza descritti precedentemente nel quadro di riferimento riflettono categorie concettuali di complessità crescente, ma non una gerarchia di prestazioni degli studenti basata sulla difficoltà dei quesiti.

La complessità concettuale rappresenta solo una delle componenti della difficoltà dei quesiti che influisce sul livello delle prestazioni. Altre componenti sono la familiarità del problema, le opportunità recenti di apprendimento e di esercizio e così via. Quindi un quesito a scelta multipla che mette in gioco competenze del raggruppamento della *riproduzione* (per esempio la domanda "quale tra i seguenti è un parallelepipedo rettangolo?" seguita dalle figure di una palla, di una lattina, di una scatola e di una piazza) può risultare molto facile per studenti a cui è stato insegnato il significato di tali termini, ma molto difficile per altri a causa della mancanza di familiarità con la terminologia usata. Anche se è possibile immaginare quesiti relativamente difficili del raggruppamento della *riproduzione* e quesiti relativamente facili del raggruppamento della *riflessione*, e per quanto sia possibile quesiti di difficoltà variabile per ciascun raggruppamento, ci si aspetta una relazione grosso modo positiva tra i raggruppamenti di competenze e la difficoltà dei quesiti.

Tra i fattori sottesi ai crescenti livelli di difficoltà del quesito e di competenza matematica vi sono i seguenti:

- Il tipo e il grado di interpretazione e di ragionamento richiesti. Questo aspetto comprende la natura della richiesta di interpretazione che deriva dal contesto del problema; la misura in cui i procedimenti matematici richiesti per risolvere il problema sono forniti esplicitamente o devono essere ricostruiti dallo studente; e la misura in cui sono richiesti *insight*, ragionamenti complessi e generalizzazioni.
- Il tipo di capacità di rappresentazione che sono necessarie, spaziando da problemi dove è usato solo un metodo di rappresentazione a problemi nei quali gli studenti devono passare tra diversi metodi oppure trovare essi stessi quelli appropriati.
- Il tipo e il livello di capacità matematiche richieste. Per questo aspetto si spazia da problemi con un unico passaggio (*single-step problems*) che richiedono la riproduzione di elementi matematici di base e l'esecuzione di semplici processi di calcolo fino a problemi con molti passaggi (*multi-step problems*) che richiedono conoscenze matematiche più complesse e abilità complesse di decisione, di elaborazione cognitiva, di analisi e soluzione di problemi e di modellizzazione.
- Il tipo e il grado di argomentazione matematica che è richiesta, andando da problemi dove non è richiesto alcun tipo di argomentazione, a problemi in cui gli studenti possono dover applicare argomentazioni matematiche note, fino a problemi dove gli studenti devono creare loro stessi argomentazioni matematiche o comprendere quelle di altre persone o giudicare la correttezza di determinati argomenti o dimostrazioni.

Al livello più basso di competenza descritto, gli studenti portano a termine processi con un unico passaggio che implicano il riconoscimento di contesti familiari e problemi matematicamente ben formulati, utilizzando nozioni e processi matematici molto noti e applicando semplici abilità di calcolo.

A un successivo livello di competenza, gli studenti portano a termine compiti più complessi che richiedono un'elaborazione a più passaggi e si basano sul collegamento di più informazioni o sull'interpretazione di diverse rappresentazioni di concetti o informazioni matematiche, riconoscendo quali ele-



menti sono pertinenti e rilevanti e come si collegano uno all'altro. A questo livello essi lavorano con modelli o formulazioni date, spesso in forma algebrica, per individuare soluzioni, o portano a termine brevi sequenze di processi o passaggi di calcolo per arrivare a una soluzione.

Al livello di competenza più alto, gli studenti assumono un ruolo più creativo e attivo nel loro approccio ai problemi matematici. Interpretano informazioni più complesse e trattano più passaggi di elaborazione. A questo livello gli studenti formulano il problema e spesso sviluppano un modello adeguato che ne favorisce la soluzione. Essi individuano e applicano strumenti e conoscenze pertinenti spesso in un contesto problematico poco familiare, dimostrano intuizione nell'individuare una strategia di soluzione appropriata e mostrano processi cognitivi di ordine superiore quali la generalizzazione, il ragionamento e l'argomentazione nella spiegazione o comunicazione dei risultati.

### **Sussidi e strumenti**

La posizione del progetto OCSE/ PISA riguardo all'uso della calcolatrice e di altri strumenti è che gli studenti dovrebbero poter usare gli strumenti che normalmente usano a scuola.

Lo scopo è quello di valutare il più fedelmente possibile quanto gli studenti sono in grado di fare e di fornire un quadro comparato il più possibile ricco di informazioni circa i risultati dei sistemi di istruzione. La decisione all'interno di un dato sistema di istruzione di consentire agli studenti di servirsi della calcolatrice non è molto diversa, in linea di principio, da altre decisioni di politica scolastica prese dai diversi sistemi di istruzione e non è controllata dall'OCSE/PISA.

Gli studenti abituati ad avere la calcolatrice a disposizione quando affrontano compiti matematici sarebbero svantaggiati se privati all'improvviso di tale risorsa.

## **RIEPILOGO**

L'obiettivo dell'indagine OCSE/PISA è di sviluppare indicatori che mostrino l'efficacia dei diversi Paesi nel preparare i propri quindicenni a diventare cittadini attivi, riflessivi e intelligenti dal punto di vista dell'uso della matematica. Per raggiungere ciò, l'OCSE/PISA ha messo a punto una serie di prove che mirano a determinare in che misura gli studenti siano in grado di utilizzare quanto hanno appreso.

Il presente quadro di riferimento fornisce una definizione di competenza matematica e definisce il piano della valutazione del 2003 che consente ai Paesi dell'OCSE di avere un quadro di alcuni importanti risultati dei loro sistemi di istruzione. La definizione di competenza matematica adottata nel presente quadro di riferimento è coerente con le definizioni di competenza negli ambiti della lettura e delle scienze e con l'orientamento di PISA ad accertare la capacità degli studenti di divenire membri attivi e impegnati nella società in cui vivono.

Le componenti principali del quadro di riferimento della matematica, coe-